Проблеми о цифарској репрезентацији бројева

Задатак 1. *Производ биномног коефицијента* $\binom{64}{21}$ *и непознатог непарног броја износи*

$$5{*}\,6{*}0\,{*}8{*}\,862\,{*}1{*}\,7{*}7\,{*}4{*}\,4{*}5\,12{*}\,9{*}{*}.$$

Одредити цифре означене звездицом.

Решење. Из записа $\binom{64}{21} = \frac{64!}{21!\cdot 43!}$ добијамо да највећи степен броја 5 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$5^{\lfloor \frac{64}{5} \rfloor + \lfloor \frac{64}{25} \rfloor - \lfloor \frac{21}{5} \rfloor - \lfloor \frac{43}{5} \rfloor - \lfloor \frac{43}{25} \rfloor} = 5^{12+2-4-8-1} = 5,$$

док највећи степен броја 2 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$2^{32+16+8+4+2+1-10-5-2-1-21-10-5-2-1} = 2^{63-18-39} = 2^6.$$

Дакле, број из поставке дељив је са 5, и дељив је са 2^6 али не и са 2^7. Одатле следи да је његова последња цифра једнака 0. Обележимо преостале непознате цифре на следећи начин:

$$\overline{5a\,6b0\,c8d\,862\,e1f\,7g7\,h4i\,4j5\,12k\,9l0}. \tag{1}$$

Приметимо да због дељивости броја (1) са 2^6 троцифрени завршетак $\overline{9l0}$ мора бити дељив са 8, тј. $\overline{9l}$ мора бити дељиво са 4, одакле добијамо $l \in \{2, 6\}$. Највећи степени бројева 3 и 11 који деле $\binom{64}{21}$ јесу $3^{21+7+2-7-2-14-4-1} = 3^2$ и $11^{5-1-3} = 11$. Одатле, број (1) дељив је са 9 и са 11, па добијамо

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 5 + a + 6 + b + 0 + c + 8 + d + 8 + 6 + 2 + e + 1 + f + 7 + g + 7 \\ &\qquad\qquad + h + 4 + i + 4 + j + 5 + 1 + 2 + k + 9 + l + 0 \\ &= 75 + a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l \equiv 3 + S \pmod 9 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 5 - a + 6 - b + 0 - c + 8 - d + 8 - 6 + 2 - e + 1 - f + 7 - g + 7 \\ &\qquad\qquad - h + 4 - i + 4 - j + 5 - 1 + 2 - k + 9 - l + 0 \\ &= 61 - S \equiv 6 - S \pmod{11}, \end{aligned}$$

где смо са S означили суму $a + b + c + \cdots + l$. Претходне две релације своде се на $S \equiv 6 \pmod 9$ и $S \equiv 6 \pmod{11}$, тј. $99 \mid S - 6$. Како је S збир 12 цифара и за цифру l имамо ограничење $2 \leqslant l \leqslant 6$, следи $2 \leqslant S \leqslant 105$, па из овог и претходног закључка добијамо $S = 6$ или

$S = 105$. Претпоставимо најпре $S = 105$. Ово је могуће само у случају $a = b = c = \cdots = k = 9$ и $l = 6$. Но, тада би четвороцифрени завршетак броја (1) износио $\overline{k9l0} = 9960$ и он би морао да буде дељив са $2^4 = 16$, а што није тачно (јер 996 није дељиво са 8). Према томе, остаје $S = 6$.

Подсетимо се, $l \in \{2, 6\}$. Размотримо прво случај $l = 2$. Како мора важити $2^3 \mid \overline{k9l} = \overline{k92}$, следи $k = 1$ или $k = 3$ (не може бити $k \geqslant 5$ због $S = 6$). Могућност $k = 3$ отпада јер мора важити $2^4 \mid \overline{2k9l}$, али $16 \nmid 2392$. Преостаје $k = 1$. Тада седмоцифрени завршетак броја (1) износи 5 121 920; но, како је ово дељиво са 2^7 (што се лако може видети примећујући да $2^6 = 64 \mid 512192$ због $64 \mid 512000$ и $64 \mid 192$), и број (1) био би дељив са 2^7, али раније је констатовано да је он дељив са 2^6 али не и са 2^7, контрадикција. Коначно закључујемо $l = 6$. Сада из $S = 6$ следи $a = b = c = \cdots = k = 0$. Посматрани број је

$$50\,600\,080\,862\,010\,707\,040\,405\,120\,960.$$

$\square$

Задатак 2. *Означимо са $S(k)$ суму цифара природног броја k. Доказати да постоји $k \in \mathbb{N}$ које не садржи цифру 9 у свом децималном запису, такво да важи $S(2^{24^{2017}}k) = S(k)$.*

Решење. Означимо $n = 2^{24^{2017}}$. У првој фази доказујемо да за дато n постоји $k' \in \mathbb{N}$ које не садржи цифру 9 у свом децималном запису, такво да важи $S(nk') \leqslant S(k')$. Нека је s број цифара броја n.

Приметимо да се n завршава цифром 6. Дефинишимо функцију f на скупу $\mathbb{N}_0$ на следећи начин: ако се j завршава цифром 0 или 1, узмимо тада $f(j) = 7$, а у свим осталим случајевима $f(j) = 8$. На овај начин постигли смо да је последња цифра израза $6f(j)+j$ увек мања од $f(j)$. Дефинишимо $d_0 = f(0) = 7$, $k'_0 = d_0$, и за $u = 1, 2, \ldots$ дефинишимо рекурзивно $d_u = f\left(\left\lfloor \frac{nk'_{u-1}}{10^u} \right\rfloor\right)$, $k'_u = 10^u d_u + k'_{u-1} = \overline{d_u \ldots d_1 d_0}$. Фиксирајмо сада $u \in \mathbb{N}_0$. За све $0 \leqslant v \leqslant u$, цифра на позицији $v+1$ здесна у производу nk'_u износи:

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{nk'_u}{10^v} \right\rfloor \bmod 10 &= \left\lfloor \frac{n(10^v \cdot \overline{d_u d_{u-1} \ldots d_v} + \overline{d_{v-1} \ldots d_1 d_0})}{10^v} \right\rfloor \bmod 10 \\
&= \left\lfloor n \cdot \overline{d_u d_{u-1} \ldots d_v} + \frac{n \cdot \overline{d_{v-1} \ldots d_1 d_0}}{10^v} \right\rfloor \bmod 10 \\
&= \left(n \cdot \overline{d_u d_{u-1} \ldots d_v} + \left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) \bmod 10 \\
&= \left(6d_v + \left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) \bmod 10 \\
&= \left(6f\left(\left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) \bmod 10 \\
&\leqslant f\left(\left\lfloor \frac{nk'_{v-1}}{10^v} \right\rfloor \right) - 1 = d_v - 1
\end{aligned}$$

(неједнакост на крају следи по дефиницији функције f). Како важи $nk'_u < n \cdot 10^{u+1}$, добијамо да nk'_u има највише $s+u+1$ цифру, па из претходног и овог запажања следи:

$$S(nk'_u) \leqslant 9s + \sum_{z=0}^{u}(d_z - 1) = \sum_{z=0}^{u} d_z + 9s - u - 1 = S(k'_u) + 9s - u - 1.$$

Одатле, за довољно велико u важи $S(nk'_u) \leqslant S(k'_u)$, што је и требало доказати. Узмимо $k' = k'_u$ за такво довољно велико u.

Довршимо сада доказ. Ако важи $S(nk') = S(k')$, задатак је решен. Претпоставимо зато $S(nk') < S(k')$. Нека је r број цифара броја nk'. Дефинишимо

$$k = \sum_{z=0}^{S(k')-S(nk')-1} 10^{sz} + 10^{s(S(k')-S(nk'))} \sum_{z=0}^{S(n)-2} 10^{rz} k'.$$

Важи $S(k) = (S(k') - S(nk')) + (S(n) - 1)S(k') = S(n)S(k') - S(nk')$. Даље, број nk заправо представља конкатенацију броја nk' поновљеног $S(n)-1$ пута и броја n поновљеног $S(k') - S(nk')$ пута, па следи $S(nk) = S(nk')(S(n)-1)+S(n)(S(k')-S(nk')) = S(n)S(k')-S(nk')$. Овим је задатак решен. $\square$

Напомена 1. Тврђење задатка заправо важи за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$, не само $n = 2^{24^{2017}}$. Скицираћемо доказ. Јасно, можемо претпоставити да се n не завршава цифром 0. Уколико се n завршава цифром a различитом од 1, доказ је директно уопштење првог решења: дефинишемо функцију $f(a,j)$ која пресликава пар (a,j) у број l такав да се $la+j$ завршава цифром различитом од l (ово је увек могуће; штавише, можемо увек одабрати $l \in \{6,7,8\}$); наставак функционише исто као малопре. Међутим, за $a = 1$, доказ је, иако се заснива на истој идеји, технички знатно изазовнији.

Напомена 2. Избор $n = 2^{24^{2017}}$ у формулацији је мотивисан следећим разлозима. Прво, најдеснија ненула цифра броја n не сме бити једнака 1 (због претходне напомене). Друго, битно је то што за одабрано n важи $n \equiv 1 \pmod 9$, јер за било коју другу класу остатака по модулу 9 постоји знатно једноставније решење: наиме, за $n \equiv 0 \pmod 9$ лако се показује да можемо узети довољно дугачко $k' = 333\ldots3336$, а за $n \not\equiv 0, 1 \pmod 9$ можемо узети довољно дугачко $k' = 888\ldots888$.